پنج‌شنبه‌های سخت
شماره‌ی ۲۵

پنج‌شنبه‌ی بیست و پنجم

دایره‌های سخت

یادداشت‌های دال

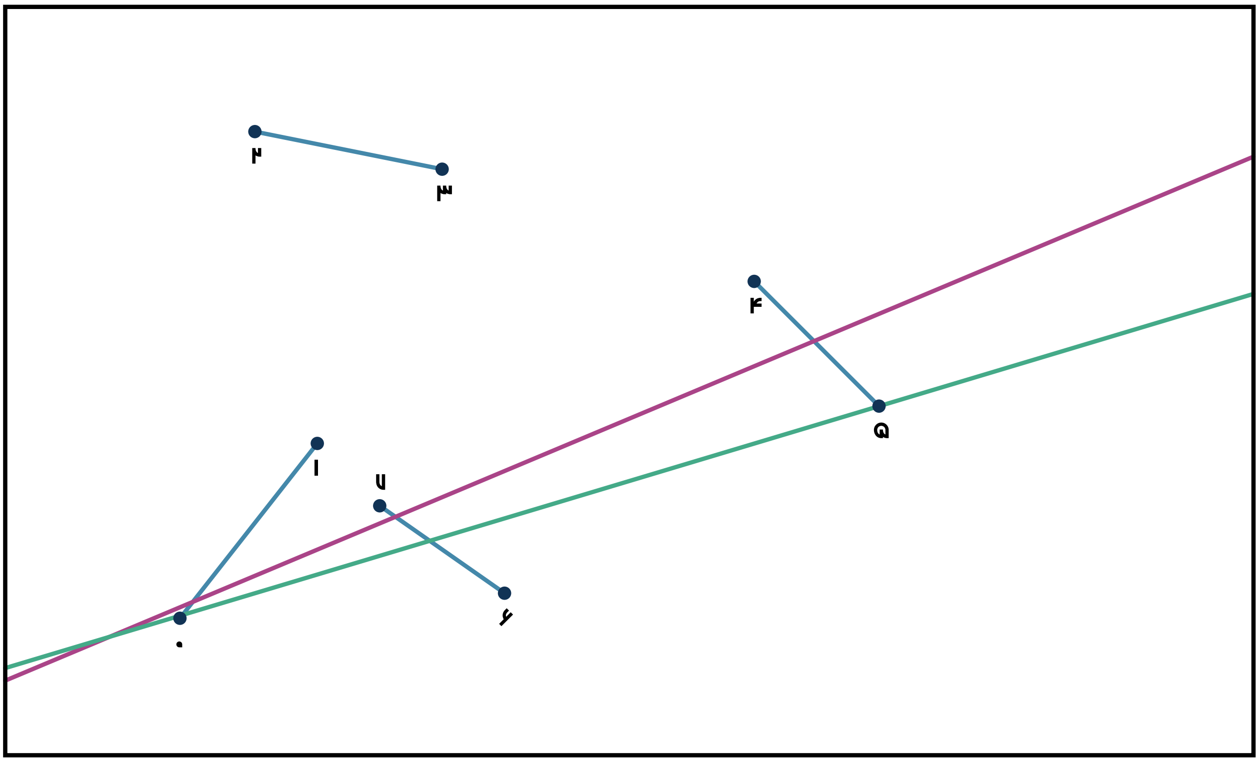
مرداد ۱۳۹۶

مقدمه‌ی سردبیر

شماره‌ی سیزدهم و پانزدهم پنج‌شنبه‌های سخت که به قسمتی از یادداشت‌های دال اختصاص داده شده بودند، با استقبال بسیاری از خوانندگان گرامی روبرو شدند. آگاه هستیم که مطالعه‌ی یادداشت‌های دال هیجان و لذت بی‌مانندی به همراه دارد و از این رو، در این شماره نیز با افتخار بخشی از یادداشت‌های اخیر دال را منتشر می‌کنیم. در این یادداشت‌ها، دال به مسئله‌ی پنج‌شنبه‌ی بیست و سوم و بیست و چهارم می‌پردازد. او مطالب بسیار جالبی را مطرح می‌کند از جمله اینکه چگونه می‌توان مسئله‌ی پنج‌شنبه‌ی بیست و سوم را حل کرد. توجه خوانندگان گرامی را به این یادداشت‌ها جلب می‌نماییم.

دال در مورد مسئله‌ی بیست و چهارم

هدف اصلی من از پرداختن بـه مسئله‌ی بیسـت و چهـارم، آمادگی بـرای حل مسـئله‌ی بیست و سـوم بـود. امـا در هنگام مطالعه‌ی این مسئله، با جنبه‌های بسیار جالبی از آن روبرو شدم که قبل از پرداختن دقیق به این مسئله آنها را پیش‌بینی نمی‌کردم. ایده‌ی اول من برای حل مسئله‌ی بیست و چهارم، استفـاده از روشـی بود کـه در مسـئله‌ی یازدهم به کار بردیم: مرتب کردن همه‌ی نقطه‌ها دور هر نقطه (با توجه به زاویه‌ی آنها) و سپـس پیمایش نقطه‌هـای مرتـب شده مطابـق این ترتیـب. در حیـن این پیمایـش تعداد پاره‌خط‌هایـی که قـطع می‌شوند محاسبـه می‌شود و بیشترین تعداد تقاطع شناسایی می‌گردد. پیچیدگی زمانی این الگوریتم $O(n^2 \log n)$ است.



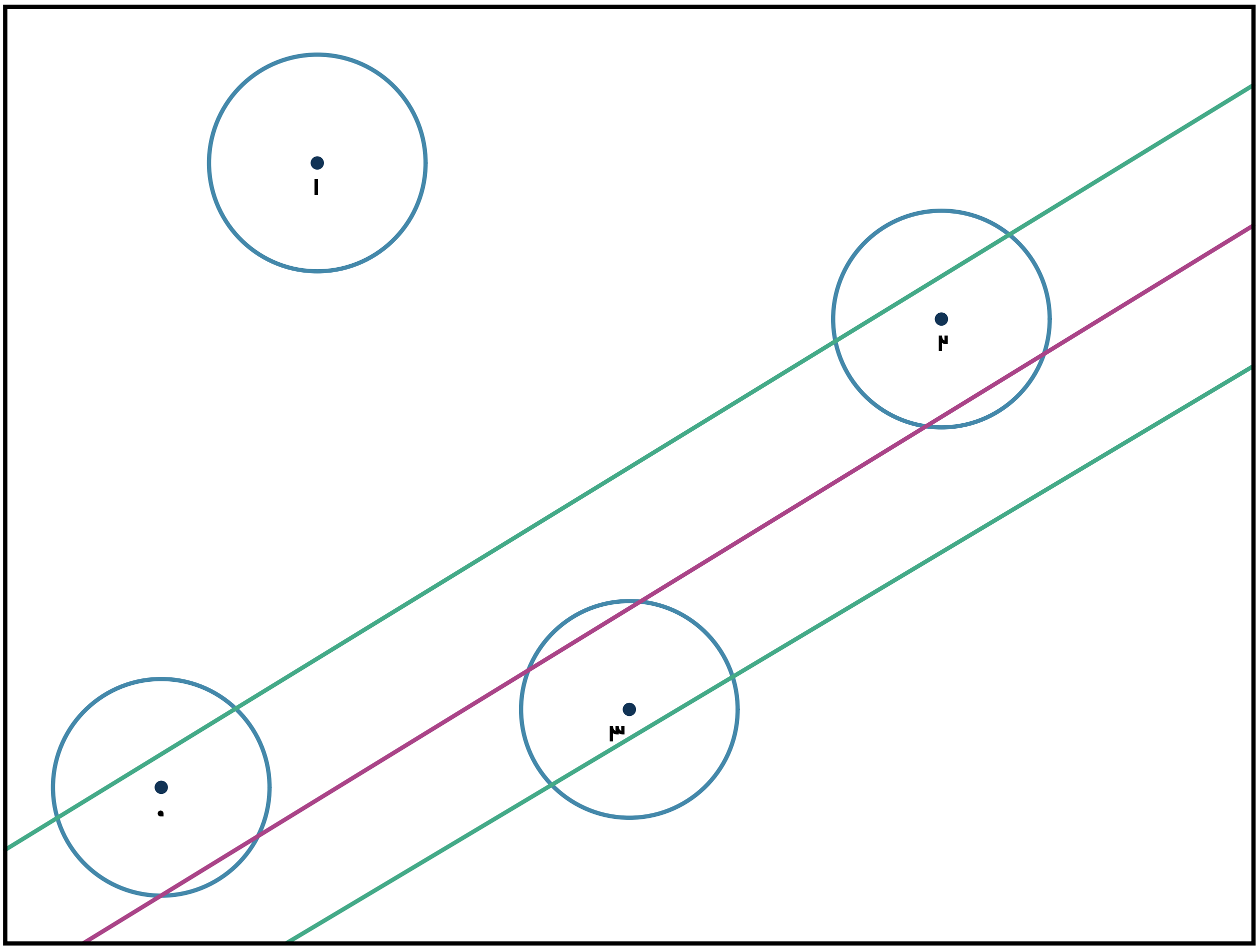
اگر چه مسئله به دنبال خطی است که از دو عدد از نقطه‌هـای ورودی عبـور کند، ایـن محدودیت را می‌توان بـدون تغییر تعداد خط‌هـای قطع شـده حذف کـرد. به عبـارت دیگر، از بین خط‌هایـی که بیشتریـن تعداد پاره‌خط‌هـای ورودی را قطع می‌کنند، حتما یکی هست که از دو نقطه‌ی ورودی عبور کند. شکل بالا را در نظر بگیرید. خط قرمز یکی از خط‌هایی است که بیشترین تعداد پاره‌خط‌ها را قطع می‌کند. دو سر آن را تا جایـی به سمـت پایین حرکت دهیـد تا خط روی دو نقطه‌ی ورودی قرار بگیـرد (مثل انداختـن یک میـله روی تـعدادی تکیه‌گاه). خط حاصل در شکل با رنگ سبز نشان داده شده است. خط حاصل به تعداد مساوی پاره‌خط قطع می‌کند و از دو نقطه‌ی ورودی می‌گذرد. همین ویژگی به شکل دیگری در مسئله‌ی بیست و سوم هم رخ می‌دهد و موجب کاهش اندازه‌ی فضای

جواب مسئله می‌گردد.

روش دیگر برای حل مسئله‌ی بیست و چهارم، نگاشت بازه‌ها به صفحه‌ی دوگان است. در صفحه‌ی دوگان، هر خط ورودی به یک نقطه و هر نقطه‌ی ورودی به یک خط تبدیل می‌شود. با بررسی چینش خط‌ها در صفحه‌ی دوگان، می‌توان خط‌هایی که بیشترین تعداد پاره‌خط‌ها را قطع می‌کنند با پیچیدگی زمانی $O(n^۲)$ شناسایی کرد. Edelsbrunner و همکارانش برای شناسایی خطی که همه‌ی پاره‌خط‌های ورودی را قطع می‌کند، از ایده‌ای مشابه استفاده کرده‌اند [۱]. در بخش پایانی این مقاله، آنها تعدادی مسئله‌ی جالب را به عنوان کارهای آتی ذکر می‌کنند.

حال در مورد مسئله‌ی بیست و سوم

یک شیوه‌ی دیگر بیان مسئله‌ی بیست و سوم این است که بـه جای تـعدادی دایره، فـرض شود تـعداد نقطه (مرکـز دایره‌ها) مـوجود هستند. بـه جای یافتـن یک خط، می‌توان دو خط مـوازی (با فـاصله‌ی قـطر دایره‌هـا) یافت کـه بیشترین تعداد نقطه‌ها در بین آنها قرار گیرند.



ایـن تناظر در شکل بـالا نشان داده شده اسـت. به جای یافتن یـک خط (خط قرمز در شکل) کـه بیشترین تـعداد دایره‌ها را قطع می‌کند، می‌توان دو خط موازی (خط‌های سبز) را یافت کـه بیشترین تـعداد نقطه‌ها بیـن آنها قـرار می‌گیرند. نکته‌ی مهم دیگری که در مسئله‌ی بیست و چهارم هم دیده می‌شود این است که هر یک از این دو خط موازی می‌توانند از حداقل یکی از نقطه‌ها عبور کننـد. به عبـارت دیگر، از بین همـه‌ی جفت خط‌هـای موازی کـه بیشترین نقطه‌ها را در بر می‌گیرند، حداقل یک جفت هست که هـر کدام از خط‌هایش از یکی از نقطه‌های ورودی عبور می‌کنند.

مسئله‌ی بیست و سوم در طول چند هفته گوشه‌ای از ذهنم را اشغال کرده بود. روش‌های متفاوتی را برای حل

آن آزمایش کردم ولی هیچ یک از آنها بهترین جواب را به صورت قطعی نمی‌یافت تا اینکه مقاله‌ای را یافتم که در آن Böcker و Mäkinen همین مسئله را مطالعه کرده‌اند [۲]. روش اول ارائه شده در این مقاله، استفاده از ساختمان داده‌ای برای پرسش‌های نیم صفحه‌ای است که با گرفتن یک خط، تعداد نقطه‌هایی که در یک سمت این خط قرار می‌گیرند را گزارش می‌دهد. حل مسئله‌ی بیست و سوم با داشتن این ساختمان داده ساده است (با استفاده از این ویژگی که دو خط موازی بهینه وجود دارند که بیشترین تعداد نقطه‌ها در بین آنها قرار می‌گیرند). نکته‌ی بسیار جالب دیگر این است که با این ساختمان داده می‌توان مسئله‌ی یازدهم و مسئله‌ی بیست و چهارم را نیز با پیچیدگی زمانی $O(n^۲ \log n)$ به سادگی حل کرد.

مراجع

1. H. Edelsbrunner, H. A. Maurer, F. P. Preparata, A. L. Rosenberg, E. Welzl, D. Wood, “Stabbing Line Segments,” *BIT Numerical Mathematics* **22**(3), pp. 274–281, Springer (1982).
2. S. Böcker, V. Mäkinen, “Maximum Line-pair Stabbing Problem and Its Variations,” pp. 183–186 in *The European Workshop on Computational Geometry* (2005).