

تمرین‌های درس هندسه‌ی محاسباتی

در هر یک از این دسته‌ها از هر رنگ فقط به یک مسئله پاسخ دهید. اگر در مورد مسئله‌ای با دوستانتان مشورت کرده‌اید یا از کتاب یا منبعی استفاده کرده‌اید، به آن اشاره کنید. دقت کنید که جواب همه‌ی تمرین‌ها باید به زبان خودتان باشد. تمرین‌هایی که علامتشان تو خالی است، تمرین‌های برنامه‌نویسی هستند.

دسته‌ی اول: مقدمات و مثلث‌بندی چندضلعی

- با استفاده از ضرب خارجی تعیین کنید که آیا دو پاره خط یکدیگر را قطع می‌کنند یا خیر.
- مساحت یک چندضلعی (که شاید محدب نباشد) را با استفاده از ضرب خارجی بدست آورید.
- آیا چندضلعی با n رأس (به ازای هر n دلخواه) وجود دارد که فقط یک مثلث‌بندی داشته باشد؟ اگر بله نمایش دهید و در غیر این صورت دلیل بیاورید.
- با گرفتن دنباله‌ی رأس‌های یک چند ضلعی، مشخص کنید که رأس‌ها در جهت یا خلاف جهت عقربه‌های ساعت داده شده‌اند.

خروجی	نمونه‌ی ورودی
cw	3 1 1 1 3 3 1

دسته‌ی دوم: پوش محدب

- چینی‌ی از نقطه‌ها را بیابید که در آن الگوریتم QuickHull بدترین عملکرد را داشته باشد.
- دو چینی از نقطه‌ها را بیابید که در آنها الگوریتم Incremental بهترین و بدترین عملکرد را از خود نشان می‌دهد.
- چرا در الگوریتم تقسیم و غلبه برای یافتن پوش محدب، در مرحله‌ی ترکیب، بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌ی هر بخش را در نظر نمی‌گیریم؟
- در الگوریتم Incremental برای یافتن پوش محدب در صورتی که سه نقطه یا بیشتر بتوانند روی یک خط ظاهر شوند، چه تغییری لازم است؟
- اگر مختصات همه‌ی نقطه‌های روی پوش محدب داده شده باشند، نشان دهید پیچیدگی بهترین الگوریتمی که می‌توان برای پیدا کردن پوش (ترتیب نقطه‌های پوش) ارائه داد چیست؟
- با گرفتن یک چند ضلعی، پوش محدب رأس‌های آن را محاسبه کنید و تعداد رأس‌های آن را گزارش دهید. پیچیدگی زمانی الگوریتم باید $O(n)$ باشد.

خروجی	نمونه‌ی ورودی
3	3 1 1 1 3 3 1

دسته‌ی سوم: صفحه‌ی دوگان

- دوگان ناحیه‌ی بیرون یک مثلث چه می‌شود؟
- دوگان یک پاره خط، شکل دو گوهی (Double Wedge) افقی می‌شود. دوگان چه شکل (یا مجموعه‌ای از شکل‌ها) دو گوهی عمودی می‌شود؟
- فرض کنید تعدادی خط داده شده‌اند و قصد داریم بررسی کنیم که یک نقطه‌ی ورودی روی یکی از این خط‌ها قرار دارد یا خیر. این مسئله را در صفحه‌ی دوگان بیان کنید.
- اگر دوگان نقطه‌ی (a, b) ، خط $y = ax + b$ تعریف شده باشد و دوگان خط $y = ax + b$ ، نقطه‌ی (a, b) ، نشان دهید این تعریف رابطه‌ی مجاورت و ترتیب را بین خط‌ها و نقطه‌ها حفظ می‌کند یا خیر.
- با گرفتن یک پاره خط و یک مثلث، بررسی کنید که آیا آنها با هم اشتراک دارند یا خیر. ورودی مختصات پنج نقطه است: دو سر پاره خط و سپس سه رأس مثلث در جهت عقربه‌های ساعت. اگر آن دو با هم تلاقی داشته باشند، خروجی عدد یک و در غیر این صورت صفر است.

خروجی	نمونه‌ی ورودی
0	0 0 5 0 1 1 1 3 3 1

دسته‌ی چهارم: جاروب صفحه

- به عنوان ورودی n پاره خط داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید که خطی عمودی بیابید که با بیشترین تعداد پاره خط‌ها برخورد می‌کند.
- تعدادی مثلث و تعدادی نقطه داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید که نقطه‌هایی را گزارش کند که در هیچ مثلثی نیستند.

دسته‌ی پنجم: چینش خطوط

- به تعداد n نقطه داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^2)$ ارائه دهید که خطی را پیدا کند که از بیشترین تعداد این نقطه‌ها عبور می‌کند.

■ به تعداد n پاره خط داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^2)$ ارائه دهید که خطی را پیدا کند که از همه‌ی این پاره خط‌ها می‌گذرد.

□ به تعداد n نقطه داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ ارائه دهید که مشخص کند که آیا نقطه‌ی اول روی پوش محدب نقاط قرار دارد. برای این کار باید بررسی کنید که دوگان نقطه‌ی اول در Envelope بالایی یا پایینی نقاط در صفحه‌ی دوگان قرار دارد یا خیر. ورودی با تعداد نقطه‌ها شروع می‌شود و سپس مختصات نقطه‌ها ظاهر می‌شوند. اگر نقطه‌ی اول روی پوش محدب نقاط باشد عدد یک و در غیر این صورت عدد صفر در خروجی باید ظاهر شود.

خروجی	نمونه‌ی ورودی
0	4 2 1 0 2 2 0 4 2

دسته‌ی ششم: نمودار ورونوبی

- چینشی از n نقطه را نمایش دهید که نمودار ورونوبی آنها تنها یک رأس داشته باشد.
- وضعیتی برای سه نقطه تعیین کنید که رأس نمودار ورونوبی برای آن سه نقطه، خارج از مثلثی باشد که از آنها تشکیل می‌شود.
- چینشی برای n نقطه تعیین کنید که یکی از ناحیه‌های نمودار ورونوبی آن $n - 1$ یال داشته باشد.
- نشان دهید یک وجه نمودار ورونوبی نامحدود است اگر و تنها اگر سایت متناظر آن جزء پوش محدب سایت‌ها باشد.
- نشان دهید که پیچیدگی بهترین الگوریتم برای محاسبه‌ی نمودار ورونوبی $\Omega(n \log n)$ است.
- الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید که با گرفتن n نقطه به عنوان ورودی، به ازای هر نقطه نزدیک‌ترین نقطه به آن را پیدا می‌کند.

دسته‌ی هفتم: مثلث‌بندی دلانی

- در الگوریتم Flip کردن یال‌های غیر قانونی، آیا امکان دارد یالی از حالت غیر قانونی قانونی شود و سپس دوباره غیر قانونی؟
- وضعیت n نقطه را نشان دهید که در آن درجه‌ی یک رأس مثلث‌بندی دلانی $n - 1$ باشد.
- از روی نمودار ورونوبی یکی از مسئله‌های مطرح شده، مثلث‌بندی دلانی را محاسبه نمایید.
- با استفاده از الگوریتم افزایشی، رأس‌های دو چهار گوش تو در تو را مثلث‌بندی کنید.
- با استفاده از الگوریتم افزایشی، مثلث‌بندی دلانی را برای رأس‌های دو چهار گوش تو در تو (که هیچ چهار رأسی روی یک دایره نباشند) محاسبه کنید.
- حالتی از n رأس را نشان دهید که در الگوریتم افزایشی ساخت مثلث‌بندی دلانی، اضافه کردن یک رأس موجب تغییر همه‌ی مثلث‌ها شود.

دسته‌ی هشتم: برنامه‌ریزی خطی

- برنامه‌ی خطی صحیح مسئله‌ی کوله‌پشتی با سه کالا را بیان کنید. فرض کنید وزن کالاها به ترتیب پنج، سه و چهار کیلوگرم باشد و ارزش آنها به ترتیب ششصد، دویست و چهارصد واحد باشد. فرض کنید ظرفیت کوله‌پشتی چهل و دو کیلوگرم باشد و از هر کالا به تعداد لازم موجود باشد.
- الگوریتم Seidel را برای برای دو متغیر x و y و تابع $f(x, y) = y - 2x$ اجرا کنید. محدودیت‌های برنامه شامل $y - x \geq -5$ ، $y + 2x \geq -4$ و $-2y - x \geq -4$ هستند. فرض کنید مقدار قدر مطلق x حداکثر چهار و قدر مطلق y حداکثر پنج باشد.

دسته‌ی نهم: جستجوی بازه‌ای

- نقطه‌های $(1, 5)$ ، $(2, 6)$ ، $(3, 3)$ ، $(4, 1)$ ، $(5, 2)$ و $(6, 3)$ را در نظر بگیرید. به این مجموعه، سه نقطه با مختصات تصادفی دیگر نیز اضافه کنید. سپس، سطح اول درخت جستجوی بازه‌ای دو بعدی را برای این نقطه‌ها بکشید و مشخص کنید چه نقطه‌هایی جزء مجموعه‌ی هر رأس هستند. اگر پرسش بازه‌ی $1 \leq x \leq 3$ و $3 \leq y \leq 6$ باشد، مشخص کنید که جستجوی مرحله‌ی دوم باید برای چه رأس‌هایی انجام شود.

دسته‌ی دهم: مکان‌یابی نقاط

- نقشه‌ی دوزنقه‌ی مستطیلی را بکشید که یک قطر آن اضافه شده است و کمی چرخیده است (ضلع مستطیل موازی با محورهای مختصات نباشد). ساختمان داده‌ی جستجوی نقشه‌ی دوزنقه‌ی آن نیز را بکشید.
- نقشه‌ی دوزنقه و ساختمان داده‌ی جستجوی یک مثلث مساوی‌الضلاع را بکشید.
- تعداد n پاره‌خط و ترتیبی از آنها را نشان دهید که ارتفاع ساختمان داده‌ی جستجو با توجه به الگوریتم مطرح شده n باشد.
- الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(\log n)$ ارائه دهید که بررسی کند نقطه‌ای در یک چند ضلعی محدب قرار دارد یا خیر.
- با گرفتن n نقطه، الگوریتمی کارا ارائه دهید که به پرسش‌های دایره‌ی خالی پاسخ دهد. هر پرسش دایره‌ی خالی، یک نقطه را مشخص می‌کند و پاسخ آن باید بزرگ‌ترین دایره‌ای به مرکز آن نقطه باشد که هیچ نقطه‌ی دیگری را در بر ندارد.

دسته‌ی یازدهم: برنامه‌ریزی حرکت

- فرض کنید چند ضلعی‌های موانع نقشه‌ی ورودی در مجموع دارای n ضلع باشند. نشان دهید به ازای هر نقطه‌ی مبدا و هر نقطه‌ی مقصد، کوتاه‌ترین مسیر حداکثر از n پاره‌خط تشکیل می‌شود.
- نمونه‌ای با n ضلع مثال بزنید که در آن وضعیتی که در مسئله‌ی قبل بیان شده است، رخ دهد.
- نقشه‌ای را در نظر بگیرید که شامل یک مثلث، دو مستطیل و دو نقطه باشد (این چند ضلعی‌ها را کمی بچرخانید). گراف قابلیت دید را برای رأس‌های چند ضلعی‌ها و نقطه‌ها بکشید.