

تمرین‌های درس مقدمه‌ای بر مسابقات برنامه‌نویسی

این مستند تمرین‌های درس مقدمه‌ای بر مسابقات برنامه‌نویسی را نگه می‌دارد. سختی نسبی این مسئله‌ها به ترتیب با رنگ‌های آبی، سبز و قرمز مشخص شده است (موارد خاکستری فقط برای یادآوری هستند). در برخی از این تمرین‌ها لازم است تعدادی عدد تصادفی تولید کنید. برای تولید اعداد تصادفی می‌توانید از هر ابزاری استفاده کنید (اعداد تصادفی افراد مختلف باید متفاوت باشند). اگر به سیستم عامل لینوکس دسترسی دارید، به راحتی می‌توانید با ترکیب دستورهای seq و shuf اعداد تصادفی تولید کنید. برای نمونه دستور زیر یک عدد از یک تا صد تولید می‌کند.

```
seq 100 | shuf | head -n1
```

یافتن کمینه‌ی بازه

- لازم است پس از گرفتن n عدد، m عمل انجام شوند. این عملیات شامل یافتن بیشینه‌ی یک بازه از اعداد ورودی (مثلاً بیشینه‌ی عدد دوم تا هفتم) و به روز کردن اعداد (مثل جایگزین کردن عدد پنجم با ۱۲) هستند. با فرض اینکه $m = \Theta(n^2)$ باشد، از بین الگوریتم‌هایی که دیده‌اید، کدام را پیشنهاد می‌دهد؟ دلیل آن را بیان کنید.
- برای نه عدد تصادفی از یک تا دوازده، ساختمان داده‌ی مبتنی بر درخت برای یافتن بیشینه‌ی بازه را بکشید و نشان دهید بیشینه اعداد دوم تا هفتم چگونه محاسبه می‌شود.
- سؤال قبل را برای روش سطل‌ها تکرار کنید.

یافتن پایین‌ترین جد مشترک

- درختی تصادفی با ارتفاع ۵ و ۱۲ رأس بسازید. سپس اجداد توان‌های دو را برای رأس‌های آن محاسبه کنید. با استفاده از این اجداد، جد مشترک دو رأس تصادفی را با نشان دادن گام‌های الگوریتم محاسبه کنید.
- یک دنباله‌ی تصادفی از ده عدد تولید کنید. سپس با کمک الگوریتم مطرح شده در کلاس، درخت کارت‌زین آن را با نمایش گام‌ها (شکل درخت پس از اضافه کردن هر عدد) بسازید.
- الگوریتم‌های متفاوتی را برای یافتن کمینه‌ی بازه دیدیم از جمله الگوریتمی با پیچیدگی حافظه و پیش‌پردازش $O(n \log n)$ و پیچیدگی زمانی $O(1)$ برای پاسخ دادن به هر پرسش (الگوریتم A). برای کاهش پیچیدگی حافظه و پیش‌پردازش به $O(n)$ گام‌هایی را انجام می‌دهیم که یادآوری می‌کنم.
- از روی دنباله‌ی ورودی درخت کارت‌زین را می‌سازیم؛ کمینه‌ی دو عنصر از آرایه‌ی ورودی، پایین‌ترین جد مشترک آنها در درخت کارت‌زین است.

- با پیمایش اویلری درخت کارتزین، دنباله‌ی E را با حداکثر $3n$ عنصر بدست می‌آوریم. آرایه‌ی R را از روی E مقدار دهی می‌کنیم به صورتی که $R(i)$ به اولین رخداد $A(i)$ در آرایه‌ی $E(i)$ اشاره کند. پایین‌ترین جد مشترک دو رأس در درخت کارتزین را می‌توان با استفاده از کمینه‌ی بازه‌ی متناظر اعداد این دو رأس در E یافت.
- برای یافتن کمینه‌ی بازه‌ی اعداد i -ام تا j -ام آرایه‌ی ورودی، می‌توان کمینه‌ی اعداد $R(i)$ تا $R(j)$ از آرایه‌ی E را بدست آورد.
- برای یافتن کمینه‌ی بازه در آرایه‌ی E از سطل‌هایی با اندازه‌ی $\frac{\log n}{4}$ استفاده می‌کنیم. تعداد سطل‌های ایجاد شده $O(n/\log n)$ خواهد بود. برای یافتن کمینه‌ی تعدادی سطل کامل، از الگوریتم A با پیچیدگی حافظه‌ی $O(n)$ استفاده می‌کنیم. برای یافتن کمینه‌ی بازه در یک سطل، از الگوریتم A با پیچیدگی حافظه‌ی $O(\log n \log \log n)$ استفاده می‌کنیم. نکته‌ی مهم این است که تنها $O(n^{1/2})$ حالت متفاوت برای هر سطل وجود دارد. بنابراین، لازم است ساختمان داده‌ی الگوریتم A فقط برای این تعداد سطل ساخته شود.

هندسه

- با گرفتن تعدادی نقطه در فضای دو بعدی، الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ ارائه دهید که سه نقطه‌ی p ، q و r را از بین نقطه‌های ورودی به شکلی پیدا کند که سایر نقطه‌های ورودی بین دو نیم‌خطی که از امتداد pq و pr حاصل می‌شوند، قرار داشته باشند. الگوریتم را برای هشت نقطه‌ی تصادفی روی صفحه نشان دهید.

جستجوی رشته‌ای

- با حروف $\{0, 1\}$ ، رشته‌ی T را با طول ۱۲ و رشته‌ی P را با طول ۶ حرف به صورت تصادفی تولید کنید. سپس، با استفاده از الگوریتم KMP رخدادهای رشته‌ی P را در T بیابید. در هر دور حلقه‌ی جستجو، مقدار k (زیر رشته‌ی منطبق شده) را نمایش دهید.
- برای رشته‌هایی که در مسئله‌ی قبل تولید کرده‌اید، ابتدا آرایه‌ی پسوندی را با نمایش گام‌های الگوریتم و جدول R بسازید و سپس با استفاده از آن و جستجوی دودویی، تعداد رخدادهای رشته‌ی P را در T بیابید.

درخت سگمنت

- درخت سگمنتی را برای پنج بازه‌ی تصادفی بسازید (برای هر رأس مثل n ، مقدار $I(n)$ و $\text{Int}(n)$ را مشخص کنید). سپس بازه‌هایی که یک مقدار تصادفی را در بر دارند بیابید.

بازی‌های ترکیبیاتی

- دو دسته سنگ وجود دارند و دو نفر با هم بازی می‌کنند. برنده اولین کسی است که هیچ حرکتی برای انجام دادن نداشته باشد (عکس حالتی که در کلاس مطرح شد). هر بازیکن در نوبت خودش دو نوع حرکت می‌تواند انجام دهد: الف) سه سنگ از دسته‌ی اول بر می‌دارد و یک سنگ به دسته‌ی دوم اضافه می‌کند یا ب) سه سنگ از دسته‌ی دوم بر می‌دارد و دو سنگ به

دسته‌ی اول اضافه می‌کند. برنده را برای تعداد تصادفی سنگ در دو دسته (از پنج تا نه سنگ در هر دسته) پیدا کنید. در حالت کلی، چگونه می‌توان برنده را پیدا کرد؟ اگر از جدول استفاده می‌کنید، با چه ترتیبی باید خانه‌های جدول پر شوند؟