

## تمرین‌های درس هندسه‌ی محاسباتی

در هر یک از این دسته‌ها از هر رنگ فقط به یک مسئله پاسخ دهید.

### دسته‌ی اول: مقدمات و مثلث‌بندی چندضلعی

- با استفاده از ضرب خارجی تعیین کنید که آیا دو پاره خط یکدیگر را قطع می‌کنند یا خیر.
- مساحت یک چندضلعی (که شاید محدب نباشد) را با استفاده از ضرب خارجی بدست آورید.
- آیا چندضلعی با  $n$  رأس (به ازای هر  $n$  دلخواه) وجود دارد که فقط یک مثلث‌بندی داشته باشد؟ اگر بله نمایش دهید و در غیر این صورت دلیل بیاورید.
- الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n)$  ارائه دهید که با گرفتن تعدادی نقطه، خطی را پیدا کند که از دو عدد از این نقطه‌ها می‌گذرد و سایر نقطه‌ها در یک سمت این خط قرار دارند.
- با گرفتن رأس‌های یک چند ضلعی، مشخص کنید که رأس‌ها در جهت یا خلاف جهت عقربه‌های ساعت داده شده‌اند.

### دسته‌ی دوم: پوش محدب دو و سه بعدی

- چینی از نقطه‌ها را بیابید که در آن الگوریتم QuickHull بدترین عملکرد را داشته باشد.
- دو چینی از نقطه‌ها را بیابید که در آنها الگوریتم Incremental بهترین و بدترین عملکرد را از خود نشان می‌دهد.
- چرا در الگوریتم تقسیم و غلبه برای یافتن پوش محدب، در مرحله‌ی ترکیب، بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌ی هر بخش را در نظر نمی‌گیریم؟
- در الگوریتم Incremental برای یافتن پوش محدب در صورتی که سه نقطه یا بیشتر بتوانند روی یک خط ظاهر شوند، چه تغییری لازم است؟
- اگر مختصات همه‌ی نقطه‌های روی پوش محدب داده شده باشند، نشان دهید پیچیدگی بهترین الگوریتمی که می‌توان برای پیدا کردن پوش (ترتیب نقطه‌های پوش) ارائه داد چیست؟

### دسته‌ی سوم: خط جاروب

- به عنوان ورودی  $n$  پاره خط داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n \log n)$  ارائه دهید که خطی عمودی بیابید که با بیشترین تعداد پاره خط‌ها برخورد می‌کند.
- تعدادی مثلث و تعدادی نقطه داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n \log n)$  ارائه دهید که نقطه‌هایی را گزارش کند که در هیچ مثلثی نیستند.

## دسته‌ی چهارم: صفحه‌ی دوگان و چینش خطوط

- دوگان ناحیه‌ی بیرون یک مثلث چه می‌شود؟
- دوگان یک پاره خط، شکل دو گوهی (Double Wedge) افقی می‌شود. دوگان چه شکل (یا مجموعه‌ای از شکل‌ها) دو گوهی عمودی می‌شود؟
- فرض کنید تعدادی خط داده شده‌اند و قصد داریم بررسی کنیم که یک نقطه‌ی ورودی روی یکی از این خط‌ها قرار دارد یا خیر. این مسئله را در صفحه‌ی دوگان بیان کنید.
- به تعداد  $n$  نقطه داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n^2)$  ارائه دهید که خطی را پیدا کند که از بیشترین تعداد این نقطه‌ها عبور می‌کند.
- به تعداد  $n$  پاره خط داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n^2)$  ارائه دهید که خطی را پیدا کند که از همه‌ی این پاره خط‌ها می‌گذرد.
- اگر دوگان نقطه‌ی  $(a, b)$ ، خط  $y = ax + b$  تعریف شده باشد و دوگان خط  $y = ax + b$ ، نقطه‌ی  $(a, b)$ ، نشان دهید این تعریف رابطه‌ی مجاورت و ترتیب را بین خط‌ها و نقطه‌ها حفظ می‌کند یا خیر.
- به تعداد  $n$  نقطه داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n)$  ارائه دهید که برای هر یک از این نقطه‌ها تشخیص دهد که آیا روی پوش محدب آنها قرار دارد یا خیر.

## دسته‌ی پنجم: نمودار ورونوی

- چینی‌ی از  $n$  نقطه را نمایش دهید که نمودار ورونوی آنها تنها یک رأس داشته باشد.
- وضعیتی برای سه نقطه تعیین کنید که رأس نمودار ورونوی برای آن سه نقطه، خارج از مثلثی باشد که از آنها تشکیل می‌شود.
- چینی‌ی برای  $n$  نقطه تعیین کنید که یکی از ناحیه‌های نمودار ورونوی آن  $n - 1$  یال داشته باشد.
- با اضافه کردن یک رأس و وصل کردن آن به یال‌های نامحدود نمودار ورونوی یک گراف ساده ایجاد می‌شود. نشان دهید میانگین درجه‌ی رأس‌های این گراف حداکثر شش است.
- نشان دهید یک وجه نمودار ورونوی نامحدود است اگر و تنها اگر سایت متناظر آن جزء پوش محدب سایت‌ها باشد.
- نشان دهید که پیچیدگی بهترین الگوریتم برای محاسبه‌ی نمودار ورونوی  $\Omega(n \log n)$  است.
- الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(n \log n)$  ارائه دهید که با گرفتن  $n$  نقطه به عنوان ورودی، به ازای هر نقطه نزدیک‌ترین نقطه به آن را پیدا می‌کند.

## دسته‌ی ششم: مثلث‌بندی دلانی

- در الگوریتم Flip کردن یال‌های غیر قانونی، آیا امکان دارد یالی از حالت غیر قانونی قانونی شود و سپس دوباره غیر قانونی؟
- وضعیت  $n$  نقطه را نشان دهید که در آن درجه‌ی یک رأس مثلث‌بندی دلانی  $n - 1$  باشد.
- از روی نمودار ورونوی یکی از مسئله‌های مطرح شده، مثلث‌بندی دلانی را محاسبه نمایید.

- با استفاده از الگوریتم افزایشی، رأس‌های دو چهار گوش تو در تو را مثلث‌بندی کنید.
- با استفاده از الگوریتم افزایشی، نمودار دلانی را برای رأس‌های دو چهار گوش تو در تو (که هیچ چهار رأسی روی یک دایره نباشند) محاسبه کنید.
- حالتی از  $n$  رأس را نشان دهید که در الگوریتم افزایشی ساخت مثلث‌بندی دلانی، اضافه کردن یک رأس موجب تغییر همه‌ی مثلث‌ها شود.

### دسته‌ی هفتم: برنامه‌ریزی خطی

- برنامه‌ی خطی صحیح مسئله‌ی کوله‌پشتی با سه کالا را بیان کنید. فرض کنید وزن کالاها به ترتیب پنج، سه و چهار کیلوگرم باشد و ارزش آنها به ترتیب ششصد، دویست و چهارصد واحد باشد. فرض کنید ظرفیت کوله‌پشتی چهل و دو کیلوگرم باشد و از هر کالا به تعداد لازم موجود باشد.
- الگوریتم Seidel را برای برای دو متغیر  $x$  و  $y$  و تابع  $f(x, y) = y - 2x$  اجرا کنید. محدودیت‌های برنامه شامل  $y - x \geq -5$ ،  $y + 2x \geq -4$  و  $-2y - x \geq -4$  هستند. فرض کنید مقدار قدر مطلق  $x$  حداکثر چهار و قدر مطلق  $y$  حداکثر پنج باشد.

### دسته‌ی هشتم: جستجوی بازه‌ای

- نقطه‌های  $(1, 5)$ ،  $(2, 6)$ ،  $(3, 3)$ ،  $(4, 1)$ ،  $(5, 2)$  و  $(6, 3)$  را در نظر بگیرید. به این مجموعه، سه نقطه با مختصات تصادفی دیگر نیز اضافه کنید. سپس، سطح اول درخت جستجوی بازه‌ای دو بعدی را برای این نقطه‌ها بکشید و مشخص کنید چه نقطه‌هایی جزء مجموعه‌ی هر رأس هستند. اگر پرسش بازه‌ی  $1 \leq x \leq 3$  و  $3 \leq y \leq 6$  باشد، مشخص کنید که جستجوی مرحله‌ی دوم باید برای چه رأس‌هایی انجام شود.

### دسته‌ی نهم: مکان‌یابی نقاط

- نقشه‌ی دوزنقه‌ی مستطیلی را بکشید که یک قطر آن اضافه شده است و کمی چرخیده است (ضلع مستطیل موازی با محورهای مختصات نباشد). ساختمان داده‌ی جستجوی نقشه‌ی دوزنقه‌ی آن نیز را بکشید.
- نقشه‌ی دوزنقه و ساختمان داده‌ی جستجوی یک مثلث مساوی‌الضلاع را بکشید.
- تعداد  $n$  پاره‌خط و ترتیبی از آنها را نشان دهید که ارتفاع ساختمان داده‌ی جستجو با توجه به الگوریتم مطرح شده  $n$  باشد.
- الگوریتمی با پیچیدگی زمانی  $O(\log n)$  ارائه دهید که بررسی کند نقطه‌ای در یک چند ضلعی محدب قرار دارد یا خیر.
- دو مجموعه‌ی  $P$  و  $R$  که هر یک  $n$  نقطه دارد، داده می‌شوند. به ازای یک نقطه‌ی ورودی مثل  $p$ ، اگر این نقطه داخل مثلثی از سه نقطه از مجموعه‌ی  $P$  قرار داشته باشد، امن است. اگر نقطه‌ای امن نباشد و در مثلثی از سه نقطه از مجموعه‌ی  $R$  قرار داشته باشد، ناامن است. الگوریتمی کارایی ارائه دهید که به پرسش‌هایی پاسخ دهد. هر پرسش یک نقطه را مشخص می‌کند و الگوریتم باید امن یا نا امن بودن آن را تشخیص دهد.

- با گرفتن  $n$  نقطه، الگوریتمی کارا ارائه دهید که به پرسش‌های دایره‌ی خالی پاسخ دهد. هر پرسش دایره‌ی خالی، یک نقطه را مشخص می‌کند و پاسخ آن باید بزرگ‌ترین دایره‌ای باشد که هیچ نقطه‌ی دیگری را در بر ندارد.

### دسته‌ی دهم: برنامه‌ریزی حرکت

- فرض کنید چند ضلعی‌های موانع نقشه‌ی ورودی در مجموع دارای  $n$  ضلع باشند. نشان دهید به ازای هر نقطه‌ی مبدا و هر نقطه‌ی مقصد، کوتاه‌ترین مسیر حداکثر از  $n$  پاره‌خط تشکیل می‌شود.
- نمونه‌ای با  $n$  ضلع مثال بزنید که در آن وضعیتی که در مسئله‌ی قبل بیان شده است، رخ دهد.
- الگوریتمی ارائه دهید که با گرفتن دو نقطه در یک چند ضلعی ساده با  $n$  رأس، کوتاه‌ترین مسیر بین آنها را با پیچیدگی  $o(n^2)$  پیدا کند.
- نقشه‌ای را در نظر بگیرید که شامل یک مثلث، دو مستطیل و دو نقطه باشد (این چند ضلعی‌ها را کمی بچرخانید). گراف قابلیت دید را برای رأس‌های چند ضلعی‌ها و نقطه‌ها بکشید.