

مقدمه‌ای بر مسابقات برنامه‌نویسی

- ۱ (۲۵) بازه‌های پنج تا ده، پنج تا پانزده، یک تا سه، دو تا چهار، هشت تا پانزده، هشت تا ده و هفت تا پانزده را در نظر بگیرید. الف) درخت سگمنت را برای همه‌ی این بازه‌ها بکشید. ب) برای یکی از این بازه‌ها نشان دهید چگونه آن بازه به درخت اضافه می‌شود. ج) با استفاده از این درخت سگمنت، گزارش دهید عدد نه در چند بازه قرار دارد (رأس‌های پیمایش شده و بازه‌هایی را که در هر رأس گزارش می‌شوند مشخص نمایید).
- ۲ (۱۵) فرض کنید در الگوریتم یافتن کمینه‌ی بازه با استفاده از سطل‌ها، اندازه‌ی سطل‌ها $n^{1/3}$ باشد. با توضیح، پیچیدگی یافتن کمینه‌ی یک بازه‌ی ورودی در این الگوریتم را محاسبه نمایید. اگر اندازه‌ی سطل‌ها $n^{2/3}$ باشد، این پیچیدگی چه تغییری می‌کند؟
- ۳ (۲۰) صف کمینه، که با استفاده از دو پشته پیاده‌سازی می‌شود را در نظر بگیرید. این عملیات روی این صف انجام می‌شوند: اضافه کردن پنج، اضافه کردن سه، اضافه کردن چهار، حذف، حذف، اضافه کردن شش، حذف، اضافه کردن دو، حذف. پس از هر یک از این عملیات، وضعیت دو پشته و کمینه را نشان دهید.
- ۴ (۲۰) فرض کنید تعداد رأس‌های یک درخت $n = k^2$ باشد (متغیر k یک عدد صحیح است). فرض کنید برای هر رأس درخت، اجداد ضرایب k نگهداری شوند: جد صفرم (پدر رأس)، جد k ، جد $2k$ ، جد $3k$ ، ام، ... و جد k^2 - ام. الف) الگوریتمی ارائه دهید تا آرایه‌ی اجداد ضرایب k همه‌ی رأس‌ها را محاسبه نماید. ب) الگوریتمی ارائه دهید که با گرفتن دو رأس، جد مشترک آنها را پیدا کند. الگوریتم‌های شما باید تا حد امکان بهینه باشد. ج) پیچیدگی حافظه و پیچیدگی زمانی پیش‌پردازش و همچنین پاسخ دادن به هر پرسش را محاسبه نمایید.
- ۵ (۲۰) یکی از افتخارات شهردار شهر نائل کامل کردن کمربندی جدید این شهر است. اما یک گام دیگر برای بهره‌برداری از این کمربندی باقی است. شهردار تصمیم گرفته است که یک جاده‌ی کاملاً مستقیم از خروجی شهر نائل (که یک نقطه‌ای خارج از نائل است) احداث کند که فقط در یک نقطه کمربندی نائل را قطع کند. فرض کنید کمربندی نائل به شکل یک چند ضلعی محدب با n رأس است و مختصات رأس‌های این چند ضلعی به ترتیب خلاف جهت عقربه‌های ساعت داده می‌شوند. الگوریتمی ارائه دهید که نقطه‌ی برخورد این جاده به کمربندی را محاسبه نماید. اگر الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ ارائه دهید پانزده نمره و اگر الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(\log n)$ ارائه دهید، در صورت درست و دقیق بودن بیست و پنج نمره از این سؤال کسب خواهید کرد.