

تمرین‌های درس هندسه‌ی محاسباتی

دسته‌ی صفرم: مقدمات

- برای تعیین ترتیب نقطه‌های پوش محدب در الگوریتمی که نقطه‌های مرزی (Extremal) را پیدا می‌کرد، الگوریتمی ارائه دهید.
- همین کار را برای الگوریتمی که یال‌های پوش را پیدا می‌کرد انجام دهید.
- الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ ارائه دهید که با گرفتن تعدادی نقطه، خطی را پیدا کند که از دو عدد از این نقطه‌ها می‌گذرد و سایر نقطه‌ها در یک سمت این خط قرار دارند.

دسته‌ی اول: پوش محدب دو و سه بعدی

- از هر رنگ، به یک مسئله پاسخ دهید.
- مساحت یک چندضلعی (که شاید محدب نباشد) را با استفاده از ضرب خارجی بدست آورید.
 - تقاطع دو پاره خط را با استفاده از ضرب خارجی تشخیص دهید.
 - چینی از نقطه‌ها را بیابید که در آن الگوریتم QuickHull بدترین عملکرد را داشته باشد.
 - دو چینی از نقطه‌ها را بیابید که در آنها الگوریتم Incremental بهترین و بدترین عملکرد را از خود نشان می‌دهد.
 - چرا در الگوریتم تقسیم و غلبه برای یافتن پوش محدب، در مرحله‌ی ترکیب، بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌ی هر بخش را در نظر نمی‌گیریم؟
 - در الگوریتم Incremental برای یافتن پوش محدب در صورتی که سه نقطه یا بیشتر بتوانند روی یک خط ظاهر شوند، چه تغییری لازم است؟
 - به سؤال قبل در حالت سه بعدی پاسخ دهید. فرض کنید چهار نقطه یا بیشتر بتوانند روی یک صفحه ظاهر شوند.
 - اگر مختصات همه‌ی نقطه‌های روی پوش محدب داده شده باشند، نشان دهید پیچیدگی بهترین الگوریتمی که می‌توان برای پیدا کردن پوش (ترتیب نقطه‌های پوش) ارائه داد چیست؟

دسته‌ی دوم: صفحه‌ی دوگان و چینی خطوط

- از هر رنگ، به یک مسئله پاسخ دهید.
- دوگان ناحیه‌ی داخل یک مثلث چه می‌شود؟ برای یک مثلث نمونه، دوگان آن را بکشید.
 - دوگان یک پاره خط، شکل دو گوهی (Double Wedge) افقی می‌شود. دوگان چه شکل (یا مجموعه‌ای از شکل‌ها) دو گوهی عمودی می‌شود؟

- فرض کنید تعدادی خط داده شده اند و قصد داریم بررسی کنیم که یک نقطه‌ی ورودی روی یکی از این خط‌ها قرار دارد یا خیر. این مسئله را در صفحه‌ی دوگان بیان کنید.
- به تعداد n نقطه داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^2)$ ارائه دهید که خطی را پیدا کند که از بیشترین تعداد این نقطه‌ها عبور می‌کند.
- به تعداد n پاره‌خط داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^2)$ ارائه دهید که خطی را پیدا کند که از همه‌ی این پاره‌خط‌ها می‌گذرد.
- اگر دوگان نقطه‌ی (a, b) ، خط $y = ax + b$ تعریف شده باشد و دوگان خط $y = ax + b$ ، نقطه‌ی (a, b) ، نشان دهید این تعریف رابطه‌ی مجاورت و ترتیب را بین خط‌ها و نقطه‌ها حفظ می‌کند یا خیر.
- به تعداد n نقطه داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ ارائه دهید که برای هر یک از این نقطه‌ها تشخیص دهد که آیا روی پوش محدب آنها قرار دارد یا خیر.

دسته‌ی سوم: نمودار ورونوی

از هر رنگ، به یک مسئله پاسخ دهید.

- چینشی از n نقطه را نمایش دهید که نمودار ورونوی آنها تنها یک رأس داشته باشد.
- وضعیتی برای سه نقطه تعیین کنید که رأس نمودار ورونوی برای آن سه نقطه، خارج از مثلثی باشد که از آنها تشکیل می‌شود.
- چینشی برای n نقطه تعیین کنید که یکی از ناحیه‌های نمودار ورونوی آن $n - 1$ یال داشته باشد.
- با اضافه کردن یک رأس در انتهای هر یال نامحدود نمودار ورونوی یک گراف ساده ایجاد می‌شود. نشان دهید میانگین درجه‌ی رأس‌های این گراف حداکثر شش است.
- نشان دهید یک وجه نمودار ورونوی نامحدود است اگر و تنها اگر رأس متناظر آن جزء پوش محدب سایت‌ها باشد.
- نشان دهید که پیچیدگی بهترین الگوریتم برای محاسبه‌ی نمودار ورونوی $\Omega(n \log n)$ است.
- الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید که به ازای هر نقطه، نزدیک‌ترین نقطه به آن را پیدا می‌کند.

دسته‌ی چهارم: مثلث‌بندی دلانی

- در الگوریتم Flip کردن یال‌های غیر قانونی، آیا امکان دارد یالی از حالت غیر قانونی قانونی شود و سپس دوباره غیر قانونی؟
- وضعیت n نقطه را نشان دهید که در آن درجه‌ی یک رأس مثلث‌بندی دلانی $n - 1$ باشد.
- از روی نمودار ورونوی یکی از مسئله‌های مطرح شده، مثلث‌بندی دلانی را محاسبه نمایید.
- با استفاده از الگوریتم افزایشی، رأس‌های دو چهار گوش تو در تو را مثلث‌بندی کنید.
- با استفاده از الگوریتم افزایشی، نمودار دلانی را برای رأس‌های دو چهار گوش تو در تو (که هیچ چهار رأسی روی یک دایره نباشند) محاسبه کنید.
- حالتی از n رأس را نشان دهید که در الگوریتم افزایشی ساخت مثلث‌بندی دلانی، اضافه کردن یک رأس موجب تغییر همه‌ی مثلث‌ها شود.

دسته‌ی پنجم: مکان‌یابی نقاط

- نقشه‌ی دوزنقه‌ی مستطیلی را بکشید که یک قطر آن اضافه شده است و کمی چرخیده است (ضلع مستطیل موازی با محورهای مختصات نباشد). ساختمان داده‌ی جستجوی نقشه‌ی دوزنقه‌ی آن نیز را بکشید.
- نقشه‌ی دوزنقه و ساختمان داده‌ی جستجوی یک مثلث مساوی‌الضلاع را بکشید.
- تعداد n پاره خط و ترتیبی از آنها را نشان دهید که ارتفاع ساختمان داده‌ی جستجو با توجه به الگوریتم مطرح شده n باشد.
- الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(\log n)$ ارائه دهید که بررسی کند نقطه‌ای در یک چند ضلعی محدب قرار دارد یا خیر.
- دو مجموعه‌ی P و R که هر یک n نقطه دارد، داده می‌شوند. به ازای یک نقطه‌ی ورودی مثل p ، اگر این نقطه داخل مثلثی از سه نقطه از مجموعه‌ی P قرار داشته باشد، امن است. اگر نقطه‌ای امن نباشد و در مثلثی از سه نقطه از مجموعه‌ی R قرار داشته باشد، ناامن است. الگوریتمی کارایی ارائه دهید که به پرسش‌هایی پاسخ دهد. هر پرسش یک نقطه را مشخص می‌کند و الگوریتم باید امن یا نا امن بودن آن را تشخیص دهد.
- با گرفتن n نقطه، الگوریتمی کارا ارائه دهید که به پرسش‌های دایره‌ی خالی پاسخ دهد. هر پرسش دایره‌ی خالی، یک نقطه را مشخص می‌کند و پاسخ آن باید بزرگ‌ترین دایره‌ای باشد که هیچ نقطه‌ی دیگری را در بر ندارد.

دسته‌ی ششم: برنامه‌ریزی خطی

- برنامه‌ی خطی صحیح مسئله‌ی کوله‌پشتی با سه کالا را بیان کنید. فرض کنید وزن کالاها به ترتیب پنج، سه و چهار کیلوگرم باشد و ارزش آنها به ترتیب ششصد، دویست و چهارصد واحد باشد. فرض کنید ظرفیت کوله‌پشتی چهل و دو کیلوگرم باشد و از هر کالا به تعداد لازم موجود باشد.
- الگوریتم Seidel را برای برای دو متغیر x و y و تابع $f(x, y) = y - 2x$ اجرا کنید. محدودیت‌های برنامه شامل $y - x \geq -5$ ، $y + 2x \geq -4$ و $-2y - x \geq -4$ هستند. فرض کنید مقدار قدر مطلق x حداکثر چهار و قدر مطلق y حداکثر پنج باشد.

دسته‌ی هفتم: برنامه‌ریزی حرکت

- فرض کنید چند ضلعی‌های موانع نقشه‌ی ورودی در مجموع دارای n ضلع باشند. نشان دهید به ازای هر نقطه‌ی مبدا و هر نقطه‌ی مقصد، کوتاه‌ترین مسیر حداکثر از n پاره خط تشکیل می‌شود.
- نمونه‌ای با n ضلع مثال بزنید که در آن وضعیتی که در مسئله‌ی قبل بیان شده است، رخ دهد.
- الگوریتمی ارائه دهید که با گرفتن دو نقطه در یک چند ضلعی ساده با n رأس، کوتاه‌ترین مسیر بین آنها را با پیچیدگی $O(n^2)$ پیدا کند.
- نقشه‌ای را در نظر بگیرید که شامل یک مثلث، دو مستطیل و دو نقطه باشد (این چند ضلعی‌ها را کمی بچرخانید). گراف قابلیت دید را برای رأس‌های چند ضلعی‌ها و نقطه‌ها بکشید.