

آزمون میانی درس آمادگی برای مسابقات برنامه‌نویسی

مجموع نمره‌ها: ۱۰۰

زمان آزمون: ۸۰ دقیقه

در این آزمون، بیان جزئیات الگوریتم‌های مطرح شده در کلاس لازم نیست. ولی اگر از آنها در دو سؤال اول استفاده می‌کنید ارتباط و شیوه‌ی استفاده از آنها را باید واضح بیان کنید. در دو سؤال آخر نیز باید در مورد عمل انجام شده در هر گام الگوریتم توضیح دهید.

۱ (۲۰) همزمان با فرا رسیدن زمان انتخابات برای انتخاب شهردار شهر نائل، قرار است شهردار فعلی به پرسش‌های اقتصادی ناظرین سیاسی‌اش پاسخ دهد. هر پرسش یک بازه‌ی زمانی را مشخص می‌کند و شهردار باید مجموع هزینه‌ی انجام شده در آن بازه را گزارش دهد. شهردار هزینه‌ی هر روز را ثبت کرده است (در مجموع n روز). برای پاسخ به پرسش‌ها، الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(\log(n))$ به ازای هر پرسش و پیچیدگی حافظه‌ی $O(n)$ ارائه دهید. فرض کنید به ترتیب روزها مقدار هزینه ۵، ۲، ۳، ۱، ۴، ۲، ۳، ۱ و ۲ باشد (عدد اول ۵ است). ساختمان داده‌ی پیشنهادی را بسازید و نشان دهید جمع هزینه‌ها از روز دوم تا پنجم چگونه محاسبه می‌شود.

۲ (۲۵) نقشه‌ی شهر نائل به شکل یک درخت با n رأس است که با خیابان به هم وصل شده‌اند. این درخت به عنوان ورودی داده می‌شود. روشی ارائه دهید که با پیچیدگی حافظه‌ی $O(n \log(n))$ فاصله‌ی هر دو رأس از درخت را با پیچیدگی زمانی $O(\log(n))$ پیدا کند (فاصله یعنی تعداد یال‌های پیمایش شده).

۳ (۲۵) آرایه‌ی پسوندی را برای رشته‌ی $abaabbabc$ با پیچیدگی زمانی $O(n \log(n))$ (با نمایش گام‌ها) بسازید و نشان دهید چگونه تعداد رخداد‌های یک رشته مثل ab را می‌توان با پیچیدگی زمانی $O(\log(n))$ پیدا کرد (با فرض اینکه طول رشته‌ای که جستجو می‌شود $O(1)$ باشد).

۴ (۲۰) در ساختمان داده‌ی اجتماع-جستجو (Union-Find) با استفاده از تکنیک فشرده‌سازی مسیر (Path compression)، فرض کنید هفت عنصر وجود داشته باشند (اعداد یک تا هفت) و عملیات زیر به ترتیب انجام شوند. وضعیت ساختمان داده را در پایان هر یک از این عملیات نشان دهید.

```
union(1, 2)
union(2, 3)
union(4, 5)
union(6, 3)
union(7, 4)
union(3, 7)
```