

آزمون نهایی درس طراحی الگوریتم

مجموع نمره‌ها: ۱۰۵

زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه

(۱) دانشگاه تازه تأسیس «دانشمندان» n ساختمان دارد. متأسفانه به علت شرایط جوی در اولین زمستان، مسیر بین این ساختمان‌ها گلی شده است و مسئولان دانشگاه تصمیم گرفته‌اند هر چه سریع‌تر و با کمترین هزینه (شرط هزینه)، بین برخی از ساختمان‌ها مسیرهایی ایجاد نمایند که بتوان از هر ساختمانی به هر ساختمان دیگر رفت (شرط دسترسی). در مرحله‌ی اول، به کمک دانشجویان دانشکده‌ی عمران هزینه‌ی ساخت m مسیر ممکن بین برخی از ساختمان‌ها تخمین زده شده است (مسیرها دو طرفه هستند). سپس، مسئولیت انتخاب تعدادی از این مسیرها (با دو شرط هزینه و دسترسی) به یکی از دوستان شما واگذار شده است.

(۵) ۱.۱ الگوریتمی که دوست شما انتخاب کرده است، بررسی همه‌ی زیر مجموعه‌ها از بین m مسیر ممکن است: به ازای هر یک از این زیر مجموعه‌ها، با یک الگوریتم با پیچیدگی زمانی $O(m)$ شرط دسترسی را بررسی می‌شود و از بین زیر مجموعه‌هایی که در این شرط صدق می‌کنند، کم‌هزینه‌ترین انتخاب می‌شود. این الگوریتم را تحلیل کنید.

(۱۰) ۲.۱ چگونه می‌توانید الگوریتم دوستان را بهبود دهید: با بیان دلیل، تعداد زیرمجموعه‌هایی که بررسی می‌شوند را به $O(m^{n-1})$ کاهش دهید و با استفاده از روش‌های پس‌گرد (Backtracking) و شاخه و حرص (Branch-and-bound) زمان جستجو را بهبود دهید.

(۱۵) ۳.۱ با توجه به تجربه‌ی شما در درس طراحی الگوریتم، می‌دانید که برای این مسئله الگوریتم‌های حریصانه‌ای موجود هستند. یکی از این الگوریتم‌ها را بیان کنید و آن را تحلیل نمایید (اثبات درستی لازم نیست).

(۱۰) ۴.۱ الگوریتم قسمت سه را برای پنج ساختمان A, B, C, D اجرا کنید در صورتی که $c_{AE} = ۵$ ، $c_{AB} = ۳$ ، $c_{BC} = ۷$ ، $c_{BD} = ۸$ ، $c_{BE} = ۶$ ، $c_{CD} = ۴$ و $c_{DE} = ۹$. c_{AB} هزینه‌ی پیش‌بینی شده برای ساخت مسیر بین ساختمان A تا ساختمان B است.

(۵) ۵.۱ در صورتی که بین برخی از ساختمان‌ها مسیرهایی از قبل موجود باشند (هزینه‌ای برای احداث مسیر بین آن ساختمان‌ها لازم نیست) چه تغییری باید در پاسخ قسمت ۳.۱ ایجاد نمایید تا همچنان شرط هزینه برقرار باشد؟

(۲) احمد به تاریخ علاقه‌ی زیادی دارد و در حین مطالعاتش به درستی انتخاب پایتخت یکی از سلسله‌ها شک کرده است. او با بررسی جغرافیایی مسیرها، زمان لشکرکشی بین برخی از شهرها را محاسبه کرده است. هدف او این است که شهری را به عنوان پایتخت انتخاب کند که بیشترین زمان لشکرکشی از آن شهر به بقیه‌ی شهرها کمینه باشد.

۱.۲ فرض کنید n شهر وجود دارند و $c_{i,j}$ زمان لشکرکشی مستقیم از شهر i به شهر j باشد (ممکن است $c_{i,j}$ مخالف $c_{j,i}$ باشد)؛ قطعاً لشکرکشی مستقیم بین همه‌ی شهرها ممکن نیست و گاهی ممکن است برای لشکرکشی از شهری به شهر دیگر، از چند شهر میانی عبور کرد. اگر کمترین زمان لشکرکشی از شهر i به شهر j را با نماد $d_{i,j}$ نشان دهیم، هدف احمد این است که شهر i را پیدا کند که مقدار $\max_{j=1}^n d_{i,j}$ کمینه باشد. با ارائه‌ی الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^3)$ ، به احمد در انتخاب پایتخت کمک کنید. اگر از الگوریتم‌هایی که در کلاس ارائه شد استفاده می‌کنید، جزئیات آن الگوریتم‌ها لازم نیست.

۲.۲ آیا می‌توان برای این مسئله یک الگوریتم $O(n^2 \log n)$ ارائه داد؟ اگر بله، در چه شرایطی و چه الگوریتمی؟ گام‌های اصلی الگوریتم را بدون جزئیات بیان کنید.

۳.۲ با توجه به مسائل امنیتی، احمد سعی می‌کند در انتخاب بهترین مسیر، کمترین تعداد شهرهای میانی را اولویت اول قرار دهد: از بین مسیرهای ممکن بین شهرهای A و B ، d_{AB} زمان لشکرکشی در مسیری باشد که کمترین تعداد شهر میانی را داشته باشد و از بین چنین مسیرهایی (با کمترین تعداد شهر میانی)، مسیری با کم‌ترین زمان لشکرکشی در نظر گرفته شود. قسمت ۱.۲ را با توجه این شرط جدید و بدون تغییر پیچیدگی زمانی آن حل کنید (راهنمایی: احمد فکر می‌کند با ساختن گرافی از گراف شهرها با وزن‌های جدید بتواند این مسئله را حل کند).

(۳) ورودی مسئله سه-صدق‌پذیری (3-Satisfiability) را می‌توان با یک الگوریتم چند جمله‌ای به ورودی مسئله‌ی مجموعه‌ی مستقل (Independent Set) تبدیل کرد و با توجه به جواب مسئله‌ی مجموعه‌ی مستقل روی این ورودی، جواب مسئله‌ی سه-صدق‌پذیری را بدست آورد. در مورد سختی این دو مسئله (وجود الگوریتمی برای حل آنها با زمان چند جمله‌ای) چه می‌توان گفت؟ با دانستن اینکه مسئله‌ی سه-صدق‌پذیری در رده‌ی ان‌پی کامل (NP-Complete) قرار دارد، در مورد عضویت مجموعه‌ی مستقل در این رده چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ به این دو سؤال با دلیل پاسخ دهید.

(۴) آرایه‌ی A با n عدد صحیح (مثبت یا منفی) را در نظر بگیرید. زیر آرایه‌ی $A[i..j]$ شامل عناصر متوالی A از عنصر i -ام تا عنصر j -ام می‌باشد. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ ارائه کنید تا بیشینه‌ی مجموع عناصر زیر آرایه‌های A را بیابد (مجموع عناصر هر زیر آرایه‌ی ممکن A را در نظر بگیرید؛ مطلوب، بیشترین این مقادیر است). چگونه می‌توان با همین پیچیدگی زمانی، بیشینه‌ی میانگین عناصر زیر آرایه‌های A را یافت؟