

## تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها — سری چهارم تمرین‌ها

از بین مسئله‌های موجود در فایلی که از آدرس زیر قابل دسترسی هستند، سه مسئله را حل نمایید (این فایل مربوط به درس طراحی الگوریتم دانشگاه صنعتی شریف، که توسط دکتر آبام و ضرابی‌زاده ارائه شده است، می‌باشد).

<http://ce.sharif.edu/courses/93-94/1/ce354-1/assignments/files/assignDir5/A3.pdf>

دقت کنید که در این مسئله‌ها، علاوه بر ارائه‌ی الگوریتم، باید درستی و پیچیدگی آن را نیز بررسی نمایید.

## راهنمایی ۱

مسئله را با استفاده از گراف مدل نمایید: می‌توانید به هر سالن یک رأس اختصاص دهید و درها را با یال نشان دهید. باید برای هر یال یک جهت تعیین نمایید که اختلاف تعداد یال‌های ورودی به هر رأس و یال‌های خروجی از آن حداکثر یک باشد (چگونه می‌توان از این گراف درها را رنگ‌آمیزی کرد؟). برای تعیین جهت یال‌ها سعی کنید یال‌های گراف را به تعدادی مسیر با رأس‌های تکراری و دور افزاز نمایید (چگونه می‌توان یال‌های گراف را به این منظور پیمایش کرد؟).

## راهنمایی ۲

چگونه می‌توان از روی درخت DFS رأس‌ها را افزاز کرد؟ باید نشان دهید در هر یک از گروه‌های حاصل هیچ یالی وجود ندارد. یادآوری می‌شود که گراف بدون دور است و مسیری با طول بیش از  $k$  یال ندارد.

## راهنمایی ۳

مسئله را در سه گام حل نمایید. در گام اول محاسبه نمایید آتش در چه زمانی به هر خانه در جدول خواهد رسید (برای این کار باید با وجود چند رأس مبدأ، فقط یک بار الگوریتم BFS را اجرا نمایید؛ چگونه؟). سپس محاسبه نمایید پینوکیو بدون وجود آتش در جدول در چه زمانی به هر یک از خانه‌های جدول می‌رسد. در گام نهایی بررسی کنید پینوکیو به چه خانه‌هایی از جدول قبل از رسیدن آتش می‌تواند برسد.

## راهنمایی ۴

برای رشته‌های ورودی یک درخت Trie (<https://en.wikipedia.org/wiki/Trie>) بسازید. با توجه به زوجیت عمق برگ‌های موجود در هر زیر شاخه از درخت، استراتژی برای برد بیان نمایید.

## راهنمایی ۵

به صورت خلاصه، از نماد  $C(T)$  برای تعداد راه‌های تقسیم رأس‌های درخت  $T$  به تعدادی مؤلفه، که هر یک شامل دقیقاً یک رأس سیاه باشند، استفاده می‌کنیم. یک رأس را به عنوان ریشه انتخاب کنید و به ازای هر رأس مثل  $v$  مقدار  $C(v)$  را برابر  $C(T(v))$  قرار دهید که در آن  $T(v)$  زیر درخت با ریشه‌ی  $v$  می‌باشد. به صورت مشابه  $C_1(v)$  را تعریف نمایید با این تفاوت که مؤلفه‌ی شامل رأس  $v$  نباید رأس سیاه

داشته باشد. سپس این مقادارها را برای هر رأس با توجه به فرزندانش بیان کنید.

## راهنمایی ۶

به دو صورت می‌توانید عمل کنید: یا یک الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر را برای محاسبه‌ی طول مسیر با ضرب تغییر دهید یا از روی گراف ورودی، گراف جدیدی بسازید که در آن وزن یال‌ها به جای ضرب، با هم جمع شوند (با چه عملگر ریاضی می‌توانید این کار را انجام دهید؟). در مورد شرایط درستی این الگوریتم (شرایطی مثل عدم وجود دور منفی که در الگوریتم‌های کوتاه‌ترین مسیر مطرح شد) بحث نمایید.

## راهنمایی ۷

الف) مشابه استدلال ارائه شده در کلاس، یک یال به درخت MST اضافه و یک یال از آن کم کنید. برای جهت عکس می‌توانید یک مثال نقض ارائه دهید. ب) همه‌ی یال‌های با وزن بیشتر از  $b$  را از گراف حذف نمایید. آیا از همبند بودن این گراف می‌توان نتیجه‌ای گرفت؟ پ) فرض کنید فهرست مرتب شده‌ی یال‌ها را دارید. یال‌ها را از وزن بیشتر به کمتر حذف نمایید؛ تا چه هنگام مطمئن هستید که یک درخت پوشا وجود دارد. وقتی به کوچک‌ترین گراف ممکن با این ویژگی رسیدید، یک درخت پوشای آن را محاسبه کنید.

## راهنمایی ۸

از روی ورودی مسئله یک گراف بسازید که در آن هر رأس یک شهر و یکی از پروازهایی که به آن شهر ختم می‌شود را نشان دهد (گراف حاصل چند رأس دارد؟). هر رأس را می‌توان با یک زوج مرتب به صورت  $(t, f)$  نشان داد که  $t$  یک شهر و  $f$  یک پرداز است. بین دو رأس  $(t_1, f_1)$  و  $(t_2, f_2)$  یک یال قرار دهید اگر پرواز  $f_2$  از شهر  $t_1$  به  $t_2$  می‌رود (گراف حاصل حداکثر چند یال دارد؟). سپس یال‌های این گراف را به شکلی وزن دار کنید که اندازه‌ی کوتاه‌ترین مسیر بین دو شهر، تعداد جابجایی شرکت‌ها باشد.

## راهنمایی ۱۰

می‌توان اثبات کرد که وقتی  $n \geq 5$  باشد، حداکثر  $\frac{n^2}{4}$  اسب شطرنج را می‌توان در یک جدول  $n \times n$  قرار داد؛ پس الگوریتمی برای این مسئله لازم نیست. برای اثبات، گرافی بسازید که رأس‌های آن خانه‌های

جدول باشند و بین دو خانه‌هایی که مجذور فاصله‌ی آنها پنج است یالی قرار دهید. نشان دهید این گراف دو بخشی است. با استفاده دو بخشی بودن این گراف و اینکه یک مسیر در آن وجود دارد که همه‌ی رأس‌ها را می‌پیماید، اثبات کنید اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل آن  $\frac{n^2}{4}$  می‌باشد.