

تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها — سری سوم تمرین‌ها

از بین مسئله‌های موجود در فایلی که از آدرس زیر قابل دسترسی هستند، دو مسئله که با روش برنامه-ریزی پویا و دو مسئله که با روش حریصانه حل می‌شود را حل نمایید (این فایل مربوط به درس طراحی الگوریتم دانشگاه صنعتی شریف، که توسط دکتر آدام و ضرابی زاده ارائه شده است، می‌باشد).

<http://ce.sharif.edu/courses/93-94/1/ce354-1/assignments/files/assignDir2/A2.pdf>

دقت کنید که در این مسئله‌ها، علاوه بر ارائه‌ی الگوریتم، باید درستی و پیچیدگی آن را نیز بررسی نمایید.

راهنمایی ۱

زیر مسئله‌ها را به این صورت بیان نمایید: به ازای هر خانه از جدول، بزرگ‌ترین زیر مربع سیاهی را در نظر بگیرید که راست‌ترین و پایین‌ترین خانه‌ی آن باشد. این مقدار را برای خانه‌ی (i, j) با توجه به مقدار خانه‌ی $(i-1, j-1)$ و تعداد خانه‌های سیاه بالا و چپ هر خانه محاسبه نمایید (این اعداد را می‌توانید در $O(n^2)$ قبل از اجرای الگوریتم اصلی محاسبه کنید).

راهنمایی ۲

به ازای هر عدد در این آرایه، بزرگ‌ترین ضرب زیر آرایه‌ای که به آن عدد ختم می‌شود را محاسبه نمایید (با استفاده از بزرگ‌ترین ضرب زیر آرایه‌ای که به عدد قبل از آن ختم می‌شود).

راهنمایی ۳

تا جای امکان رأس‌هایی که درجه‌ای کمتر از d دارند را از گراف حذف نمایید. باید نشان دهید که گراف حاصل بزرگ‌ترین زیر گراف ممکن است که درجه‌ی همه‌ی رأس‌های آن d باشد. همچنین برای دستیابی به پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ باید از داده ساختار مناسبی استفاده نمایید.

راهنمایی ۴

ابتدا اندازه‌ی زیر درختی که از هر رأس درخت اصلی شروع می‌شود را بدست آورید (هر بار یک برگ را حذف نمایید و تعداد رأس‌ها در زیر شاخه‌ی آن را به پدرش در درخت اضافه نمایید؛ هنگام حذف یک رأس، برگ‌های جدید را نیز محاسبه نمایید). با داشتن اندازه‌ی زیر شاخه‌های درخت، عدد هر رأس را بیابید (پس از حذف یک رأس، اندازه‌ی مؤلفه‌های حاصل چقدر است؟).

راهنمایی ۵

سفارش‌ها را به ترتیب زمان رساندن آنها از بیشترین به کم‌ترین چاپ نمایید (سفارشی که l_i آن بیشتر است را اول چاپ کنید). برای اثبات درستی، اول نشان دهید یک جواب بهینه‌ای وجود دارد که سفارش با بیشترین زمان رساندن در آن اول چاپ می‌شود. سپس نشان دهید در صورتی که زمانبندی بهینه‌ی $n-1$ سفارش باقی‌مانده در دسترس باشد، می‌توان با انجام سفارش با بیشترین l_i قبل از این

زمانبندی، به زمانبندی بهینه برای n سفارش دست یافت.

راهنمایی ۶

بدیهی است که بزرگ‌ترین ساختمان (با طول n) مرز بین ساختمان‌های قابل مشاهده از هر دو طرف را مشخص می‌کند. بنابراین این ساختمان، سایر ساختمان‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کند. همچنین، نشان دهید در هر یک از این دسته‌ها، اندازه‌ی نسبی ساختمان‌ها مهم نیست (مثلاً تعداد چینش ساختمان‌هایی که ۲ عدد از آنها مشخص باشند برای $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$ و $\langle 2, 3, 8, 9 \rangle$ برابر است).

سپس زیر مسئله‌ها را به این صورت بیان کنید: تعداد چینش m ساختمان که دقیقاً k عدد از آنها مشخص باشند. برای شکستن این مسئله به زیر مسئله‌ها، از مکان بزرگ‌ترین ساختمان در بین این m ساختمان استفاده کنید (ترتیب ساختمان‌هایی که پشت این ساختمان قرار می‌گیرند در تعداد ساختمان‌های مشخص تأثیرگذار نیست).

راهنمایی ۷

فرض کنید تقاطع خیابان‌ها (رأس‌های گراف) ترتیب (دلخواهی) دارند. با یک دور بررسی خیابان‌ها، تعداد خیابان‌های مستقیم (که رأس مبدأ آنها قبل از مقصد آنها است) و عکس (که رأس مبدأ آنها بعد از مقصد آنها است) را بشمارید.

راهنمایی ۸

زیر مسئله‌ها را به این صورت بیان نمایید: $O_{i,j}$ یعنی بیشترین زیبایی که از قرار دادن i گل اول در j گلدان اول حاصل می‌شود (بدیهی است که برخی از گل‌ها می‌توانند استفاده نشوند و برخی از گلدان‌ها خالی بمانند). سپس $O_{i,j}$ را با استفاده از زیر مسئله‌های کوچک‌تر بیان نمایید.

راهنمایی ۹

برای سادگی در نمادها، فیلی که باید در مکان i -ام قرار بگیرد را i شماره‌گذاری نمایید و مکان اولیه‌ی این فیل را c_i قرار دهید (این عمل تنها برای سادگی الگوریتم است و تأثیری در الگوریتم یا هزینه‌ی مرتب کردن ندارد). در این صورت همه‌ی فیلهایی مثل i و j در صورتی که $i < j$ باشد و $c_i > c_j$ باشد،

حتما باید جایگزین گردند (چرا؟). مجموع هزینه‌ی این جابجایی‌ها را W بنامید. بنابراین، در مرتب کردن فیل‌ها حداقل باید هزینه‌ی W صرف شود. از طرفی نشان دهید می‌توان فیل‌ها را به صورتی مرتب کرد که هزینه‌ی آن دقیقا برابر W باشد (مشابه الگوریتم Insertion Sort عمل کنید).

باید مقدار W را در زمان $O(n)$ محاسبه نمایید. به این منظور، باید به ازای هر فیل مثل فیل i -ام، مجموع وزن فیل‌هایی که در دو دسته‌ی زیر قرار می‌گیرند محاسبه شوند: الف) فیل‌هایی که مکان کنونی-شان قبل از c_i است ولی مکان نهایی آنها بعد از i است. ب) فیل‌هایی که مکان فعلی آنها پس از c_i است و مکان نهایی آنها قبل از i است.

برای یافتن مقدارهای قسمت الف) (قسمت ب) به صورت مشابه محاسبه می‌شود) مقدار $C_{i,j}$ را بیابید که تعداد فیل‌هایی است که قبل از مکان i قرار دارند ولی مکان نهایی آنها پس از j می‌باشد (این مقادیر را به صورت استقرایی بیان نمایید).

راهنمایی ۱۰

ابتدا به این نکته دقت نمایید که تعداد دندان‌های یک کودک (و همین‌طور تعداد دندان‌های خراب او) قطعا کمتر از سی است. زیر مسئله‌های این مسئله را به این صورت بیان کنید: مقدار کم‌ترین هزینه‌ی ترمیم j دندان از بین i کودک اول است. در بیان $C_{i,j}$ به صورت بازگشتی به این نکته دقت کنید که اگر قرار باشد k دندان از کودک i -ام انتخاب شوند، بهتر آن است از بین دندان‌هایش، k دندانی که کم‌ترین هزینه‌ی ترمیم را دارند انتخاب گردند.