

## تحلیل و طراحی الگوریتم‌ها — سری دوم تمرین‌ها

شش مسئله از مسئله‌های موجود در فایلی که از آدرس زیر قابل دسترسی است را حل نمایید (این فایل مربوط به درس طراحی الگوریتم دانشگاه صنعتی شریف، که توسط دکتر آبام و ضرابی زاده ارائه شده است، می‌باشد).

<http://ce.sharif.edu/courses/93-94/1/ce354-1/assignments/files/assignDir/A1.pdf>

دقت کنید که در این مسئله‌ها، علاوه بر ارائه‌ی الگوریتم، باید درستی و پیچیدگی آن را نیز بررسی نمایید.

## راهنمایی ۱

چاه‌ها و مزرعه‌ها را با توجه به مختصات آنها از چپ به راست شماره‌گذاری نمایید. فرض کنید  $p_i$  مختصات چاه  $i$ -ام و  $f_i$  مختصات مزرعه‌ی  $i$ -ام باشد. یک وارونگی وقتی رخ می‌دهد که چاه  $i$ -ام به مزرعه‌ی  $j$ -ام و چاه  $i'$ -ام به مزرعه‌ی  $j'$ -ام نگاشت داده شود به صورتی که  $i' < i$  و  $j' > j$ . نشان دهید با جایگزین کردن نگاشت چاه‌ها در یک وارونگی، می‌توان مجموع طول لوله‌های استفاده شده را کاهش داد.

سپس جواب بهینه‌ی مسئله را به صورت استقرایی بیان کنید. ابتدا نشان دهید یک جواب بهینه وجود دارد که در آن چاه اول به مزرعه‌ی اول اختصاص می‌یابد (در غیر این صورت نشان دهید می‌توان با از بین بردن یک وارونگی، طول لوله‌ها را کاهش داد). سپس می‌توانید با استفاده از فرض استقرایی یک جواب بهینه برای بقیه‌ی چاه‌ها و مزرعه‌ها بدست آورید؛ با اضافه کردن نگاشت چاه اول به مزرعه‌ی اول به این جواب، یک جواب بهینه برای نگاشت همه‌ی چاه‌ها بدست آورید.

## راهنمایی ۲

ابتدا داروها را با توجه به حداکثر دمای بازه‌ی آنها مرتب نمایید. سپس مسئله را به صورت استقرایی بیان نمایید: دارویی که حداکثر دمای قابل تحمل آن کمینه است (داروی اول بعد از مرتب سازی) و همه‌ی داروهایی که بازه‌ی آنها در حداقل یک نقطه با بازه‌ی داروی اول اشتراک دارند را حذف نمایید (آنها را در محفظه‌ای که دمای  $h_1$  دارد قرار دهید) و مسئله را برای داروهای باقی مانده با استقرا حل نمایید.

برای اثبات درستی گام استقرا، باید نشان دهید در محفظه‌ای که در آن داروی اول قرار دارد، حداکثر داروهای ممکن قرار داده شده‌اند و به این صورت می‌توان جواب بهینه‌ای تولید کرد که داروهای مشابهی در محفظه‌ی داروی اول قرار داشته باشند.

## راهنمایی ۳

الگوریتمی با استفاده از روش تقسیم و حل ارائه نمایید. فرض کنید به ازای هر زیر مسئله محور  $X$  با توجه به خطوط قابل مشاهده تقسیم شده است. در هنگام ترکیب زیر مسئله‌ها مشابه الگوریتم mergesort، بازه‌ها را با هم ترکیب نمایید (در هر بازه‌ی حاصل، یکی از خطوطی که در زیر مسئله‌ها قابل مشاهده بوده است، همچنان قابل مشاهده خواهد ماند) ولی در نظر داشته باشید که در صورتی که دو خط قابل مشاهده در یکی از این بازه‌ها یکدیگر را قطع نمایند، بازه باید به دو قسمت شکسته شود.

## راهنمایی ۴

فرض کنید  $n$  نامزد وجود دارند و رأی نامزد  $i$ -ام با  $v_i$  نشان داده می‌شود. مسئله را به صورت استقرایی بیان نمایید: با داشتن الگوریتمی که بتواند برای  $k$  نفر اول نامزد با بیشترین رأی را پیدا کند، برای  $k + 1$  نفر اول این شخص را شناسایی کنید.

## راهنمایی ۵

در این مسئله باید به این نکته دقت نمایید که رأس‌های با درجه‌ی یک (برگ‌ها) در هیچ درخت دودویی کاملی قرار نخواهند گرفت. همچنین می‌توان نشان داد، با حذف یک برگ از یک درخت، گراف حاصل نیز یک درخت خواهد بود. بنابراین به صورت استقرایی مسئله را حل نمایید: برای دستیابی به یک الگوریتم خطی، لیست برگ‌ها را در ابتدای الگوریتم محاسبه نمایید و در هر گام الگوریتم به روز رسانید (می‌توانید لیست برگ‌ها را در فرض استقرای بگنجانید).

## راهنمایی ۶

مسئله را به صورت استقرایی بیان نمایید؛ برای دستیابی به پیچیدگی زمانی  $O(n \log n)$  باید برای جستجوی اعداد بزرگ‌تر از یک عدد داده شده از داده ساختار مناسب استفاده نمایید.

## راهنمایی ۷

برای قسمت ترکیب از روش تقسیم و حل، باید روشی ارائه دهید که همه‌ی اعضای دو گروه ترکیب شوند (که اندازه‌ی هر کدام  $\frac{n}{2}$  است)، در  $\frac{n}{2}$  گام با هم مسابقه دهند.

## راهنمایی ۸

فرض استقرا را روی تعداد رأس‌ها بنا کنید. در اضافه کردن یک رأس در اثبات حکم استقرا، دقت کنید که اگر گرافی که به آن رأس جدید را اضافه می‌کنید بدون دور باشد، می‌توانید رأس جدید را با همه‌ی یال‌های ورودی یا همه‌ی یال‌های خروجی به گراف جدید اضافه کنید و گراف حاصل همچنان بدون دور باقی بماند (چرا؟).

## راهنمایی ۹

مسئله را به صورت تقسیم و حل بیان کنید و در مرحله‌ی ترکیب نشان دهید اگر هر یک از دو زیر گروه از همه‌ی اخبار گروه خود آگاه باشند می‌توان در یک مرحله همه‌ی افراد را از همه‌ی اخبار آگاه کرد.